

A2 TEORÍA DE CIRCUITOS

CAPÍTULO 2

COMPONENTES DE REDES

Cátedra de Teoría de Circuitos

Edición 2017

CAPITULO 2: COMPONENTES DE REDES

2.1 Introducción

Los circuitos eléctricos se encuentran en casi todas partes: en computadoras personales, receptores de televisión y equipos de hi-fi, en redes de potencia, en sistemas de telecomunicaciones transcontinentales, etc. Estos circuitos son muy disímiles en su naturaleza, y en la forma en que son analizados y diseñados.

El **propósito** de la Teoría de Circuitos es *predecir* en forma cualitativa y cuantitativa el comportamiento eléctrico de los circuitos físico, con el fin de optimizar el diseño de los mismos, en particular en lo que se refiere a reducción de costos y mejoramiento de la performance bajo todo tipo de condiciones de operación (efectos de la temperatura, del envejecimiento, posibles condiciones de falla, etc.). La herramienta que utilizará para esto será la matemática, y los *conceptos* y *resultados* relativos a los circuitos se expresarán en función de *ecuaciones de circuitos* y *variables de circuitos*.

El **dominio de aplicación** de la Teoría de Circuitos es extremadamente amplio. En efecto, el *tamaño* de los circuitos varía enormemente, desde circuitos integrados en gran escala, que incluyen cientos de miles de componentes (microcircuitos) a los circuitos hallados en todo tipo de instrumentos electrónicos, radios, TV, computadores, y, finalmente, a los circuitos de telecomunicaciones y redes de potencia que vinculan continentes. Las *tensiones* halladas en el estudio de los circuitos varían desde microvoltios (estudios de ruido en instrumentos de precisión) a megavoltios en redes de potencia. Las *corrientes* varían desde femtoamperes (10^{-15} A) en electrómetros, a los megaamperes hallados en redes de potencia en condiciones de falla. Las *frecuencias* varían desde frecuencia cero (corriente continua) a gigahertz (10^9 Hz) (microondas). Los niveles de potencia pueden variar desde 10^{-14} W (señal de radio proveniente de otras galaxias) a los miles de megawatts producidas por generadores eléctricos.

La Teoría de Circuitos **enfoca** el comportamiento *eléctrico* de los circuitos, haciendo abstracción de los procesos térmicos, mecánicos o químicos: su interés es predecir y explicar las *tensiones* y *corrientes* medidas en *bornes* del dispositivo, sin involucrarse con el fenómeno físico que ocurre dentro del mismo.

2.2 Aproximación a parámetros concentrados.

En el desarrollo de la materia trabajaremos fundamentalmente con *circuitos a parámetros concentrados*. Para que un circuito pueda ser considerado como tal, su dimensión física debe ser lo suficientemente pequeña como para que las ondas electromagnéticas se propaguen en él casi instantáneamente. O, lo que es lo mismo, cuando la longitud de onda de las señales que se propagan en el circuito sea mucho mayor (100 o más veces) que las dimensiones físicas del circuito. Para fijar estos conceptos, consideremos los siguientes ejemplos:

1) Un pequeño circuito de computadora está en un chip de 1 mm de longitud. La señal excitadora se aplica durante un intervalo de tiempo de 0,1 ns. Aceptando, con relativa certeza, que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en dicho componente es la velocidad de la luz (3×10^8 m/s), el tiempo que insume el desplazamiento de la señal en dicho componente es:

$$\frac{10^{-3} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3,3 \times 10^{-12} \text{ s} = 0,0033 \text{ } \mu\text{s} \ll 0,1 \text{ ns}$$

2

Como vemos, el tiempo de propagación de la señal en el chip, en comparación con el tiempo de permanencia de la señal en el mismo es despreciable, condición esta que nos permite decir que, mientras dure la señal, toda la estructura del chip se hallará solicitada de manera uniforme.

2) Consideremos un circuito de audio. La frecuencia de excitación mas elevada es $f = 25 \text{ kHz}$. Para ondas electromagnéticas, esto corresponde a una longitud de onda:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{2,5 \times 10^4 \text{ 1/s}} = 1,2 \times 10^4 \text{ m} = 12 \text{ km}$$

Vemos que aún distribuyendo el circuito en una cancha de fútbol (entre 100 y 110 m de longitud), su tamaño sería pequeño comparado con la longitud de onda más corta.

3) Consideremos ahora, a los efectos de afirmar criterios de análisis, el caso de una línea de transmisión de energía lo suficientemente larga como para que se exteriorice lo propuesto. Sea la frecuencia de excitación $f = 50 \text{ Hz}$. Aceptando que la velocidad de propagación de las ondas EM sigue siendo $3 \times 10^8 \text{ m/s}$, tendremos que la longitud de onda será $\lambda = 6000 \text{ km}$

La magnitud de excitación, supuestamente senoidal, realiza una evolución completa en un tiempo:

$$t = \frac{1}{50} = 2 \times 10^{-2} \text{ s}$$

Establecido el régimen, vemos que, suponiendo valor cero de la onda de excitación en el inicio de la línea, el valor máximo se encuentra a los 1500 km, lo cual implica que los distintos puntos del sistema se hallan solicitados de distintas maneras.

Si en cambio estuviéramos hablando de una línea de transmisión de señales de 2 GHz, entonces la longitud de onda sería $\lambda = 15 \text{ cm}$, lo cual cambia radicalmente el enfoque de la situación.

Vemos así que la validez del tratamiento como circuito a parámetros concentrados debe analizarse cuidadosamente.

Cuando se satisfacen las condiciones de propagación instantánea, la teoría electromagnética prueba y los experimentos muestran que la aproximación a parámetros concentrados es válida. Desde el punto de vista de la teoría electromagnética, un circuito a parámetros concentrados se considera reducido a un punto, dado que se basa en el hecho de que las ondas electromagnéticas se propagan instantáneamente en el mismo. Por esta razón, en la teoría de circuitos a parámetros concentrados, las ubicaciones relativas de los elementos del circuito no afectaran el comportamiento del mismo. La aproximación del circuito *físico* mediante un circuito *a parámetros concentrados* es similar a la modelización del cuerpo rígido por una partícula: al hacerlo, los datos relativos al entorno (forma, tamaño, orientación) del cuerpo son ignorados por la teoría. En nuestro curso sólo trataremos circuitos a parámetros concentrados.

En aquellas situaciones en las cuales la aproximación a parámetros concentrados no es válida, deben considerarse las dimensiones físicas del circuito, y se hablará de *circuitos a parámetros distribuidos* (p. ej., guías de ondas y líneas de transmisión). En estos casos, las tensiones y corrientes no dependerán solo del tiempo, sino de variables espaciales (longitud, ancho).

2.3 Circuitos y modelos.

En Teoría de Circuitos es de suma importancia entender el concepto de "modelización" y la diferencia que existe entre un "modelo" y un "circuito físico" o un "dispositivo eléctrico físico". Y dado que las leyes de Kirchhoff se cumplen para cualquier circuito físico, la discusión de las

mismas puede separarse del comportamiento eléctrico de los elementos de circuito, que iremos viendo también durante el desarrollo del presente capítulo.

Al hablar de *circuito físico* nos referimos a cualquier *interconexión* de *dispositivos eléctricos físicos*. Ejemplos conocidos de estos dispositivos son los resistores, bobinas, condensadores, diodos, transistores, amplificadores operacionales, baterías, transformadores, motores eléctricos, generadores eléctricos, etc. Un ejemplo de circuito físico se muestra en la Fig. 1, constituido por la interconexión de una pila, un interruptor y una lamparita mediante conductores.

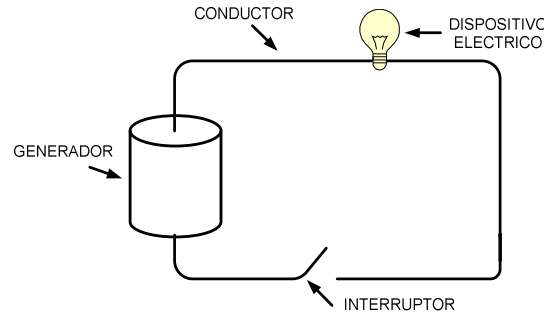


Figura 1: Esquema del circuito eléctrico de una linterna

Distinguimos, por lo tanto, entre:

Dispositivo eléctrico: es el objeto físico que integra el sistema en estudio en el laboratorio, la fábrica, etc., y al que denominaremos: bobina, condensador, batería, diodo, etc. Puede ser ensayado en un laboratorio.

Circuito físico: es la estructura topológica conformada mediante la unión galvánica (conexión metálica) de dispositivos eléctricos. Dicha unión se realiza mediante conductores, que idealmente deberían ser perfectos, pero que en la realidad no lo son, por lo que van a introducir sus propios parámetros (resistencia, inductancia). Sobre el circuito físico se realizarán, durante un ensayo en laboratorio, mediciones de tensión, corriente y potencia.

Los dispositivos eléctricos se analizarán en función de modelos idealizados de resistores, inductores, condensadores, etc., capaces de brindar la información que a través de ellos se desee obtener del sistema real de origen. A estos modelos los denominaremos elementos de circuitos.

Modelo de circuito: es la interconexión de elementos de circuitos que corresponden a dispositivos físicos, y permitirá realizar predicciones teóricas del comportamiento del circuito físico real.

Si las predicciones teóricas basadas en el *análisis* del circuito no concuerdan con las mediciones, la causa de la discrepancia puede deberse a mediciones erróneas, error en el análisis o, frecuentemente, a una pobre elección del modelo, tal como podría por ejemplo ocurrir si se utiliza un modelo válido en baja frecuencia para realizar un análisis en alta frecuencia.

El objetivo de la Teoría de Circuitos es desarrollar métodos para predecir el comportamiento de un sistema, a través del circuito a él asociado. Como ejemplo, veamos el sistema físico representado en la Figura 2 (a).

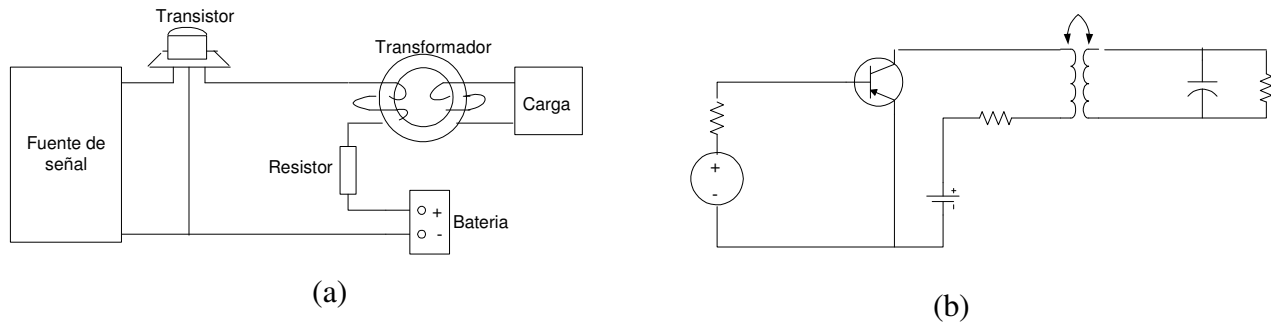


Figura 2: Ejemplo de modelización de un sistema físico

La Figura 2 (a) muestra un circuito físico, constituido por dispositivos eléctricos: generador, resistencia, transistor, batería, transformador y carga. Para analizarlo, lo modelizamos (Figura 2 (b)), mediante la interconexión de elementos de circuito (fuente, resistores, transistor, batería, bobinas acopladas, capacitor). Frecuentemente deberemos recurrir a la simulación de un circuito por diferentes motivos, por ejemplo: que el sistema físico no está disponible, que la experimentación sobre el sistema físico puede llegar a ser muy peligrosa, que su costo sea muy elevado, que las variables o los parámetros del sistema sean inaccesibles, o que en el experimento no podamos eliminar la influencia de las perturbaciones externas.

En este capítulo comenzaremos el análisis de circuitos simples compuestos por elementos pasivos y activos. Dentro de los elementos pasivos, nos limitaremos a las resistencias y fuentes controladas, reservando el estudio de inductancias y capacitores para más adelante.

2.4 Dipolos pasivos: Resistores

Un resistor, (también llamado resistencia) es un componente pasivo de dos terminales (dipolo), cuya tensión en bornes v_{ab} es directamente proporcional a la corriente i_{ab} que lo recorre.

La constante de proporcionalidad se denomina **resistencia**, y la relación V-A correspondiente es la ley de Ohm:

$$V_{ab} = R I_{ab} \qquad [R] = [V] / [A] = \Omega \text{ (ohm)}$$

La mayoría de los resistores físicos hechos de metal, bajo determinadas condiciones de operación, temperatura, corriente, etc., satisfacen la ley de Ohm, y por lo tanto admiten como modelo al resistor pasivo lineal. Este modelo, en consecuencia, es válido en un amplio rango de operación y régimen temporal. En el caso de trabajar con corrientes excesivas o frecuencias elevadas, será necesaria una modelización diferente y apropiada a las circunstancias. Históricamente, el término resistor (o resistencia) se ha utilizado para los dispositivos que satisfacen la ley de Ohm. En la Figura 4 se representa la característica V-A de una resistencia, descrita por la ley de Ohm.

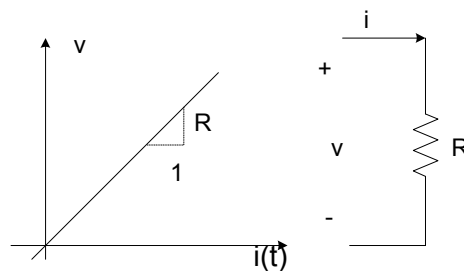


Figura 3: Característica V-A de una resistencia

El elemento recíproco de la resistencia es la conductancia

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i_{ab}}{v_{ab}} \quad [G] = [A] / [V] = \Omega^{-1} \text{ (mho o siemens)}$$

La potencia instantánea absorbida por una resistencia es:

$$p(t) = v_{ab}(t) i_{ab}(t)$$

Sustituyendo la tensión o la corriente por aplicación de la ley de Ohm llegamos a:

$$p(t) = R i_{ab}^2(t) \quad \text{ó} \quad p(t) = v_{ab}^2(t) / R$$

A partir de cualquiera de estas ecuaciones vemos que la potencia instantánea nunca podrá ser negativa, es decir $p(t) \geq 0$, por lo que, de acuerdo a lo visto en el capítulo anterior, concluimos que la resistencia siempre consume potencia. En la Figura 4 se muestran las gráficas de corriente, tensión, potencia instantánea y energía instantánea para una resistencia.

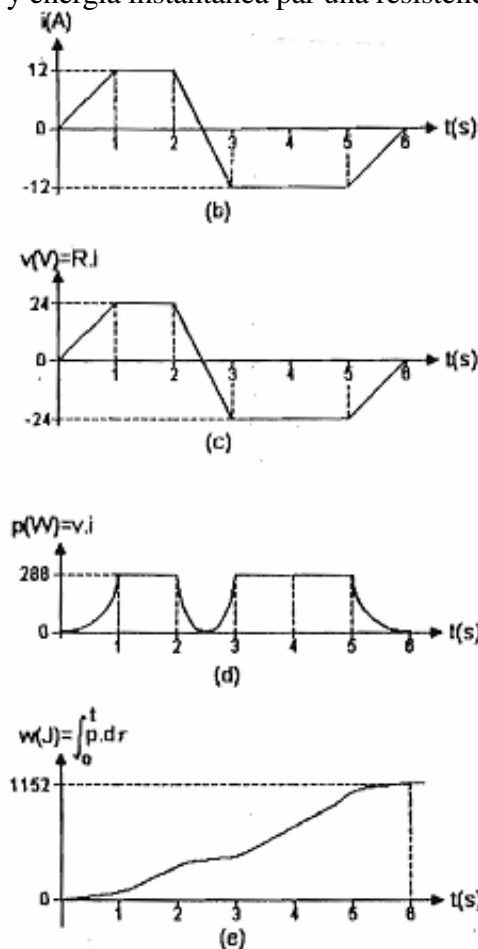


Figura 4: Ejemplos de corriente, tensión, potencia instantánea y energía instantánea en una resistencia

2.5 Circuito abierto y Cortocircuito

Se dice que un par de terminales está en circuito abierto cuando **no se drena corriente de los mismos** (Figura 5).

Por el contrario:

Se dice que un par de terminales está cortocircuitado cuando la **d.d.p. entre ellos es cero**, independientemente del valor de corriente que circule de un borne al otro (Figura 6).

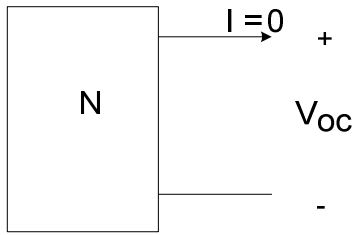


Figura 5: Circuito abierto ($I = 0A$)

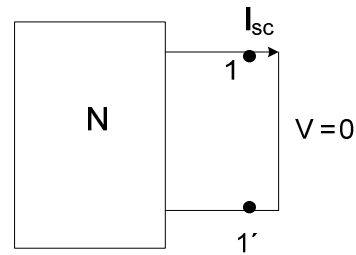


Figura 6: Cortocircuito ($V_{11'} = 0V$)

En la figura 5 la tensión en bornes V_{oc} puede tener cualquier valor, dependiendo del circuito **N** que se considere. Esta tensión se denomina tensión de circuito abierto.

En la figura 6 la corriente I_{sc} podrá tomar un valor que estará limitado solamente por las resistencias del circuito, y que recibe el nombre de corriente de cortocircuito de la red.

2.6 Dipolos activos: Fuentes

La energización de circuitos físicos puede realizarse mediante dos tipos de fuentes o elementos activos: *fuentes de tensión* y *fuentes de corriente*, en las que, al igual que en cualquier dipolo, la corriente que entra por un terminal es igual a la que sale por el otro terminal. No obstante esta característica, se diferencian de los dipolos pasivos en el hecho de que la característica volt-ampere de una fuente fija el valor de una variable independientemente de la otra, mientras que la de un elemento pasivo relaciona ambas variables. Es decir, la fuente de tensión fija un valor de tensión para cualquier valor de corriente, y la fuente de corriente fija la corriente independientemente de la tensión en bornes. Las fuentes, ya sea de tensión o de corriente, podrán ser *ideales* (cuando la variable que le es propia posee un valor constante, independientemente de la otra variable, la cual es fijada por el circuito) o *reales* (cuando en el modelo interviene un nuevo parámetro, que denominaremos resistencia interna de la fuente).

2.6.1 Fuentes de tensión

a) Fuentes de tensión ideales

Una fuente de tensión ideal mantiene, por definición, una tensión fija entre sus terminales independientemente de la corriente que circula por ella.

$$v(t) = V_s \quad \forall \quad i(t)$$

La simbología usada para representar una fuente de tensión ideal de valor $v(t)$ es la que se muestra en la Figura 7 (a). Cuando la tensión de la fuente no varía con el tiempo, se utiliza el símbolo de la Figura 7 (b).

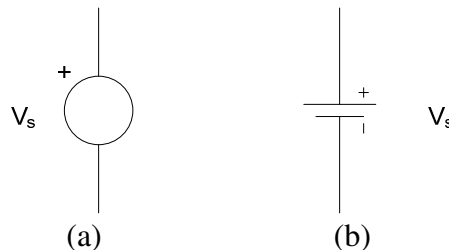


Figura 7: Representación de una fuente de tensión

El modelo matemático de la fuente de tensión ideal se muestra en la Figura 8, para este caso:

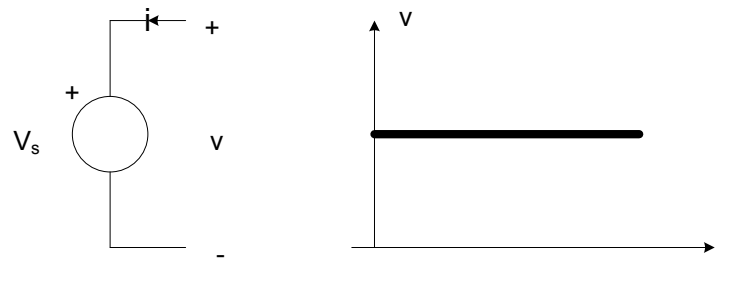


Figura 8: Característica V-A de una fuente de tensión ideal

Vemos así que la tensión en bornes está fijada en el valor de f.e.m. de la fuente, independientemente del valor de corriente que entrega la misma. Por lo tanto, no podemos determinar la corriente que circula por la fuente solo mirando la fuente, dado que dicha corriente está determinada por el circuito externo al cual esta conectada la fuente de tensión. Esta corriente podrá ser positiva, negativa o cero. Si la f.e.m. de la fuente es cero, entonces la d.d.p. en bornes de la misma también será cero. En este caso, la fuente es equivalente y puede por lo tanto ser reemplazada por un cortocircuito, el cual tiene, por definición, la propiedad de mostrar d.d.p. nula entre sus extremos independientemente de la corriente que lo recorra. De esta manera, introducimos el concepto de fuente *pasivada*, o sea, una fuente que no entrega al circuito lo que constituye su característica esencial, y que debe ser reemplazada, al no cumplir con la función que normalmente se le asocia, por algo que indique su nueva condición:

fuentes ideal de tensión pasivada = cortocircuito

Cuando se conecta una fuente de tensión ideal entre dos nudos de una red, la tensión entre los mismos se ve forzada a tomar el valor de la fuente, y este valor queda fijo independientemente de lo que ocurra en el resto de la red. Como ejemplo, veamos el circuito de la Figura 9, que representa una versión idealizada de la batería de un auto y los dispositivos que acciona.

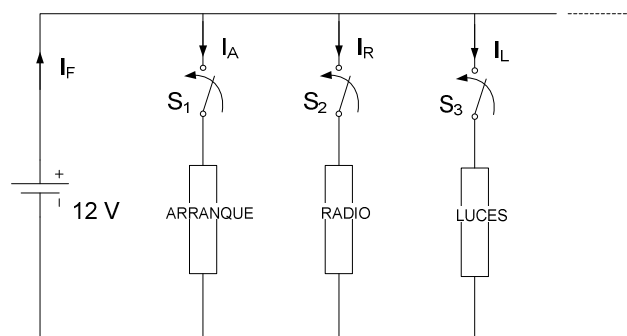


Figura 9: Representación circuital de la batería de un auto

Cuando se cierra el interruptor S_1 , la tensión de la batería queda aplicada al motor de arranque, comúnmente llamado burro de arranque, con comienza a circular corriente por la rama, y la corriente que entrega la fuente es $I_F = I_A$. Cuando se cierra S_2 , $V_R = 12\text{ V}$ (ley de Kirchhoff de tensión aplicada al lazo batería- S_2 -radio), se energiza la radio y la corriente que entrega la fuente será $I_F = I_A + I_R$. Al cerrar S_3 , $V_L = 12\text{ V}$, se encienden las luces y la fuente entregará una corriente $I_F = I_A + I_R + I_L$. Es decir, cuando las respectivas llaves se cierran, estableciéndose un

vínculo galvánico entre los elementos, todos los dispositivos quedan sometidos a una d.d.p. de 12 V, y se podrían conectar otros más en paralelo con la batería sin afectar la alimentación a los ya conectados. Sin embargo, la corriente total entregada por la batería I_F dependerá del número de elementos que se conectan en paralelo con la misma, aumentando a medida que se incrementa dicho número, si bien sigue manteniéndose constante la tensión entre sus bornes.

b) Fuentes de tensión reales:

Nosotros sabemos que en la realidad una batería no es una fuente ideal, dado que la d.d.p. entre sus bornes va disminuyendo a medida que se incrementa la corriente que entrega. Esto se debe a que la batería real posee un cierto valor de resistencia interna. Surge así la diferencia entre fente ideal y fente real, y, consecuentemente, la diferencia entre fuerza electro motriz (f.e.m.) y diferencia de potencial (d.d.p.).

En la Figura 10 se muestra el modelo correspondiente a una fuente de tensión real, en la cual se adoptó la convención de signos activa (corriente saliente por el borne más positivo de tensión). La LKT nos permite obtener la ecuación de la tensión en bornes:

$$v = v_s - R_s i \quad \text{relación V-A de la fuente de tensión real}$$

la cual es la ecuación de una recta, cuyas intersecciones con los ejes de tensión y de corriente son la tensión en circuito abierto v_{oc} (para $i = 0$) y la corriente de cortocircuito i_{sc} (para $v = 0$).

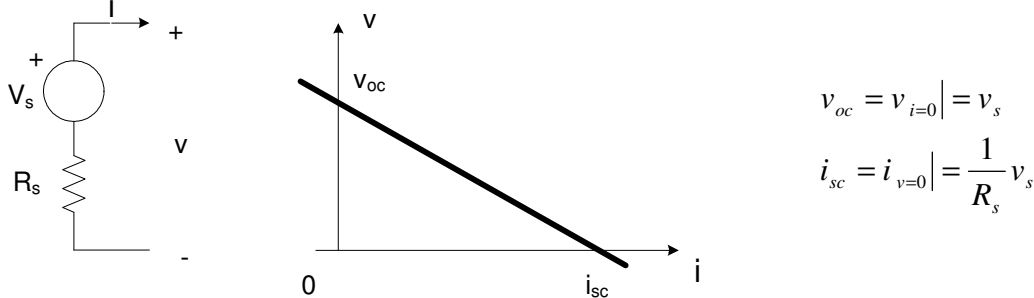


Figura 10: Modelo y característica V-A de una fuente de tensión real

Queda así evidenciada la diferencia que existe entre fuerza electromotriz (propia de la fuente) y diferencia de potencial. Si $R = 0$ (fuente ideal), $v = v_s \forall i$, es decir, la f.e.m. y la d.d.p. en bornes coinciden.

2.6.2 Fuentes de corriente

a) Fuente de corriente ideal

Una fente de corriente ideal, por definición, mantiene una corriente de valor i_s (en la dirección de la flecha marcada dentro del círculo), independientemente de la tensión que haya entre sus bornes.

$$i(t) = I_s \quad \forall u(t)$$

En la Figura 11 (a) vemos la característica volt-ampere, en la 11 (b) el símbolo utilizado, y en la 11 (c) dos posibles evoluciones temporales: uno constante, correspondiente a una fuente de corriente continua, y uno de evolución senoidal, correspondiente a una fuente de corriente alterna.

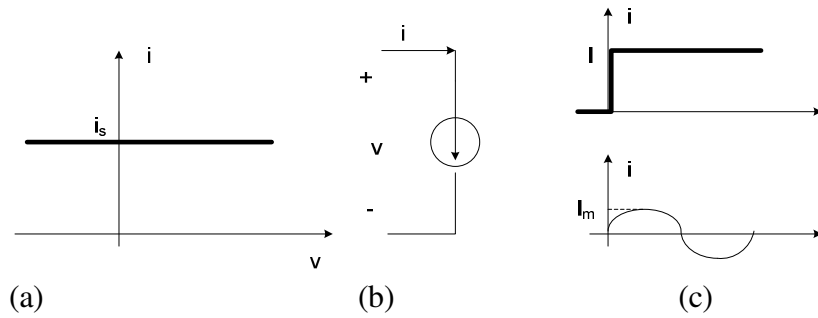


Figura 11: Característica V-A, modelo y evoluciones de fuente de corriente ideal

Si la corriente I_s es cero, entonces la corriente que la fuente entrega al circuito es nula para todo t . En este caso, la fuente es equivalente a un circuito abierto, el cual, por definición, tiene la propiedad de que no admite circulación de corriente independientemente de la d.d.p. entre sus bornes. Esto nos permite entonces decir que:

fuentes de corriente ideal pasivada = circuito abierto

En forma similar a lo que ocurría con la fuente de tensión, vemos que ahora no podemos determinar la d.d.p. en bornes de una fuente de corriente simplemente mirando dicha fuente, sino que este valor queda fijado por el circuito externo al cual está conectada, pudiendo ser positivo, negativo, o cero. Solamente podemos asegurar el valor de la corriente por la rama en la que se encuentra la fuente.

Ejemplo de dispositivos físicos que pueden modelizarse mediante una fuente de corriente son el generador electrostático de Van de Graff o una célula fotoeléctrica, entre otros.

b) Fuente de corriente real:

Una fuente de corriente real será aquella que entregue al circuito una corriente cuyo valor depende de la d.d.p. entre sus bornes. Evidentemente, el modelo propuesto anteriormente no nos será útil, dado que ahora debemos dejar en evidencia que no toda la corriente generada por la fuente se entrega al circuito externo. Proponemos por lo tanto un modelo compuesto por una fuente ideal y una rama en paralelo por cuya resistencia R_i se deriva parte de la corriente de la fuente, y a la cual desde ahora denominaremos *resistencia interna* de la fuente de corriente. En la Figura 12 se muestran el circuito equivalente (a), la característica V-A (b) y el modelo matemático (c). Es fácil observar que, cuando $R_i = \infty$ nos encontramos con una fuente de corriente ideal.

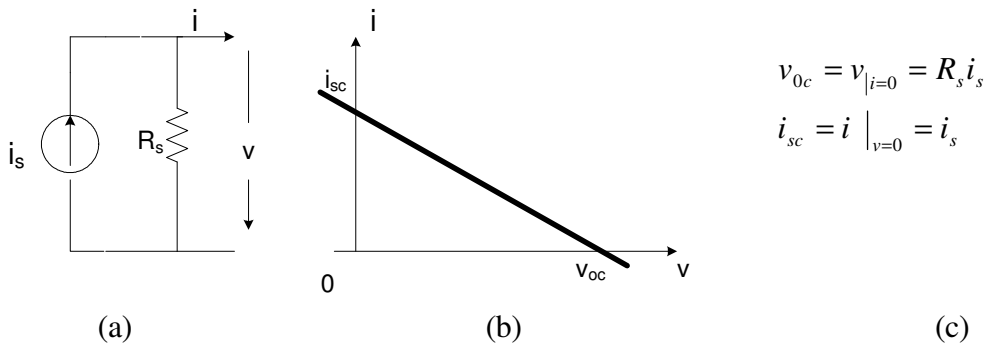
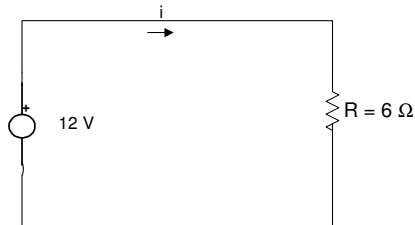


Figura 12: Modelo y característica V-A de una fuente de corriente real

Vemos que, cuando la d.d.p. en bornes de la fuente es cero, la corriente $i(t)$ es igual a i_s y se denomina “corriente de cortocircuito”, mientras que cuando $i(t) = 0$, la d.d.p. en bornes de la fuente es directamente igual a la caída de tensión en bornes de la resistencia interna y se denomina “tensión de circuito abierto v_{oc} ”.

Ejercicios de aplicación:

1) La batería de un auto puede modelarse como una fuente de tensión constante de 12 V, y las luces como una resistencia de 6Ω . El circuito se muestra en la figura siguiente. Determinar la corriente i , la potencia p y la energía suministrada por la batería durante un período de 4 horas.

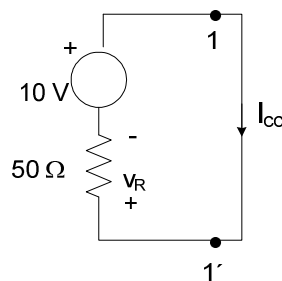
**Rta:**

$$I = 2 \text{ A}$$

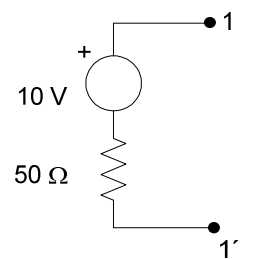
$$P = 24 \text{ W}$$

$$W = 3,46 \times 10^5 \text{ J}$$

2) Calcular el valor de la tensión de vacío y el de la corriente de cortocircuito en los circuitos siguientes. Qué ocurre en ambos casos si la resistencia disminuye?



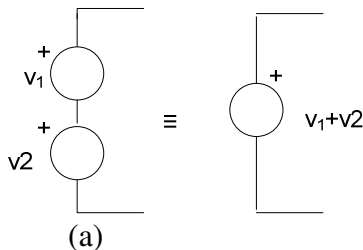
(a)



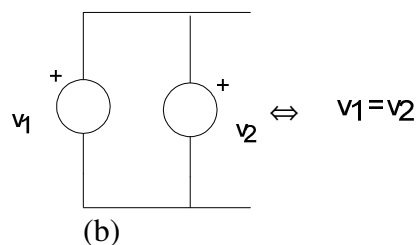
(b)

2.6.3 Interconexión de fuentes

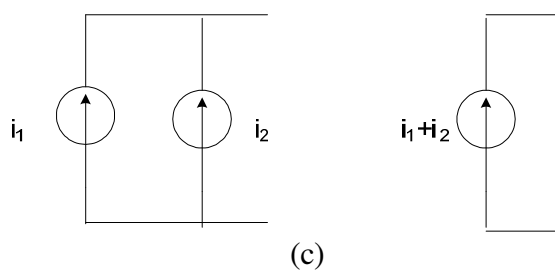
Analizaremos los distintos casos mostrados en la Figura 13.



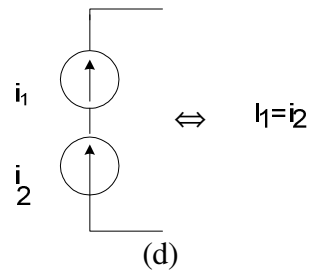
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 13: Ejemplos de interconexiones de fuentes del mismo tipo

a) Las fuentes de tensión pueden conectarse en serie, como se muestra en la Figura 13 (a). Dado que la tensión entre los bornes 1 y 1' es igual a la suma algebraica de las f.e.m.s de cada fuente, puede utilizarse una fuente de tensión equivalente de valor $v_1 + v_2$ para representar la característica entre los terminales 1 y 1'. Si se desea que las fuentes conectadas actúen como fuentes de tensión, los bornes 1-1' no deben cortocircuitarse.

b) Dos fuentes de tensión pueden conectarse en paralelo si y solo si las f.e.m.s de ambas son iguales y las polaridades son las mismas, tal como se muestra en la Figura 13 (b). Si estas dos condiciones no se cumplen, se estaría violando la Ley de Kirchhoff de tensiones en el camino cerrado que contiene a las dos fuentes, lo cual, en la práctica, se traduciría en un daño a las fuentes.

c) Las fuentes de corriente pueden ser conectadas en paralelo tal como se muestra en la Figura 13 (c). Dado que la corriente que sale por el borne 1, por Ley de Kirchhoff de corrientes es $i_1 + i_2$, puede utilizarse una fuente de valor $(i_1 + i_2)$ para representar la característica en bornes. Si se pretende que las fuentes actúen como fuentes de corriente, los bornes 1-1' no deben dejarse en circuito abierto, dado que en ese caso se estaría violando la primera ley de Kirchhoff en el camino cerrado que se forma.

d) Dos fuentes de corriente pueden conectarse en serie si y sólo si ambas son iguales y las corrientes tiene el mismo sentido de circulación (Figura 13 (d)). Si estas dos condiciones no se cumplen, la Ley de Kirchhoff de Corrientes se violaría en el punto de unión de las dos fuentes (nudo). Si en la práctica se produjera una conexión como esta, las fuentes de corriente dejarían de actuar como tales, y sus características V-A cambiarían drásticamente para que se cumpliera la LKC.

Analizaremos ahora la posibilidad de **interconexión mixta** de fuentes:

a) Una fuente de tensión puede conectarse en serie con una fuente de corriente, situación que se muestra en la Figura 14 (a). Dado que la corriente en bornes está determinada por la fuente de corriente, la combinación es equivalente a una fuente de corriente en lo que concierne la característica en bornes.

b) Una fuente de tensión y una de corriente pueden también conectarse en paralelo, tal como se muestra en la Figura 14 (b). Dado que la tensión en bornes es v , independientemente del valor de la fuente de corriente, la característica en bornes es equivalente la fuente de tensión de valor v .

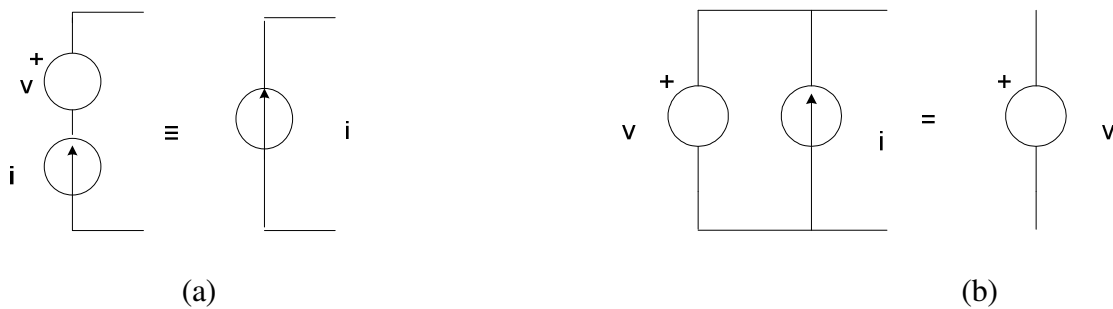
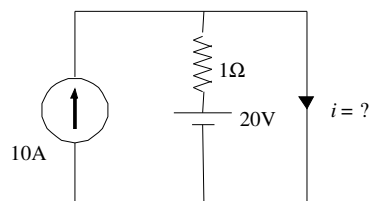


Figura 14: Ejemplos de interconexiones mixtas

Ejercicio de aplicación:

Para el circuito de la figura, hallar el valor de la corriente incógnita indicada.



2.7 Equivalencia externa de dipolos activos (fuentes)

Decimos que:

Dos dipolos D1 y D2 son equivalentes externos cuando a misma d.d.p. en sus bornes les corresponden mismas corrientes ingresantes y viceversa, es decir, tienen la misma potencia exteriorizable $p(t) = v(t) \cdot i(t)$.

Buscaremos ahora la equivalencia externa de dipolos activos:

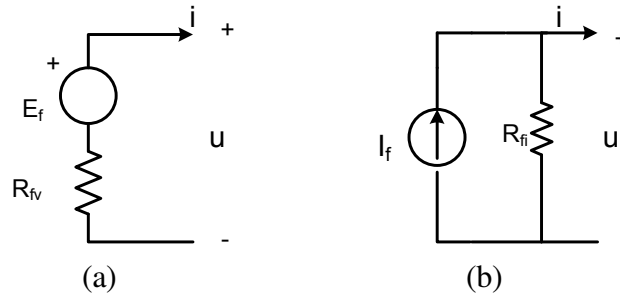


Figura 15: Equivalencia externa de dipolos activos

En la Figura 15 (a) vemos que:

$$U = E - I R_{fv}$$

En la Figura 15 (b) vemos que:

$$I = I_f - \frac{U}{R_{fi}} \Rightarrow U = I R_{fi} - I R_{fi}$$

Igualando m. a m. con la ecuación resultante de la fig. 15(a), será:

$$U = U$$

$$E = I_f R_{fi}$$

$$R_{fv} = R_{fi}$$

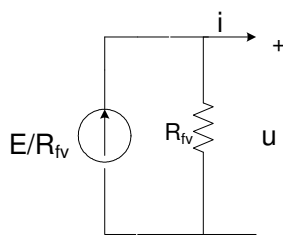
Análogamente, de la ecuación resultante de la figura 12(a), será:

$$-U + E = I R_{fv}$$

por lo que:

$$I = \frac{E}{R_{fv}} - \frac{U}{R_{fv}}$$

En esta expresión vemos que el primer sumando es constante y el segundo sumando es variable, dado que es función de la d.d.p. U . Como, debido al primer miembro, vemos que las unidades son A, podemos pensar que esta última ecuación es la expresión de la LKC en un nudo, tal como se muestra en la Figura 16, y comparar ambos sumandos con los correspondientes a los elementos mostrados en la figura 15 (a).



$$I_f = \frac{E}{R_{fv}}$$

$$R_{fi} = R_{fv}$$

Figura 16: Equivalencia externa de dipolos activos

Vemos así que, a partir de un dipolo con una fuente de tensión, podemos obtener un dipolo equivalente con fuente de corriente y viceversa.

Ahora bien, si hacemos que la d.d.p en bornes del dipolo de la figura 15(b) sea $U = 0$ (cortocircuito en bornes), la fuente de corriente no entregará potencia, pero si hacemos lo mismo en bornes del dipolo de la figura 15(a) circulará una corriente de valor:

$$I_{fv} = E_f / R_{fv} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P_{fuente} = I_{fv}^2 R_{fv}$$

por lo que la fuente de tensión sí estará entregando potencia.

Análogamente, si hacemos que la corriente $I = 0$ (condición de circuito abierto), vemos que la fuente de tensión de la figura 15 (a) no entrega potencia, y sí lo hace la fuente de corriente de la figura 15(b), dado que la corriente que entrega puede circular por la resistencia interna

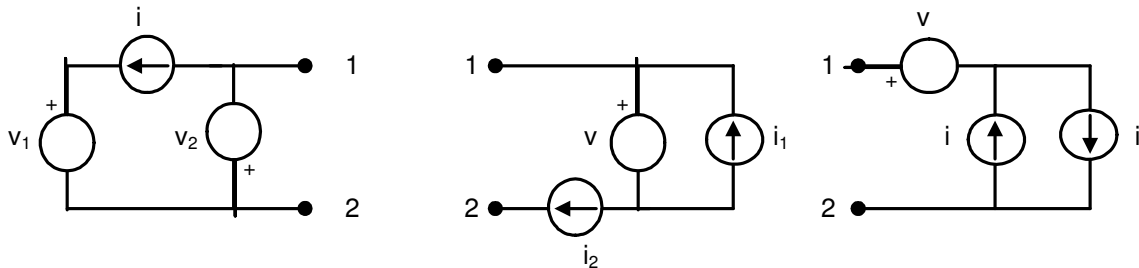
$$\Rightarrow P_{fuente} = I_f^2 R$$

Por lo tanto, concluimos que:

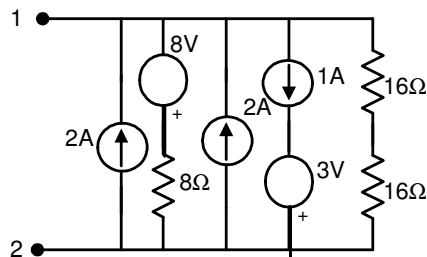
Un dipolo con fuente de tensión es **equivalente externo** de un dipolo con fuente de corriente y viceversa.
 Ambos dipolos **no son equivalentes internos** dado que a igualdad de condiciones en bornes no entregan la misma potencia.

Ejercicios de aplicación

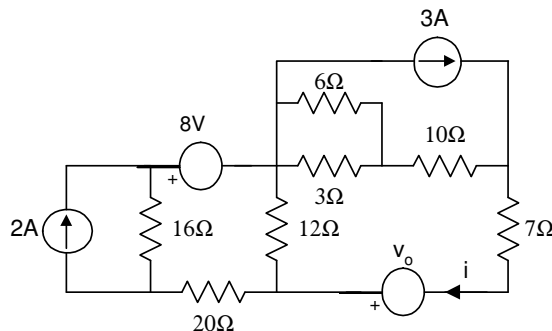
1. Hallar la fuente equivalente:



2. Hallar el dipolo equivalente entre los puntos 1-2



3. Determinar v_o usando transformación de fuentes si $i = 5/2 A$.



Rta: $v_o = 28 V$

2.8 Fuentes controladas

A diferencia de lo que ocurre con las fuentes de tensión o de corriente, ya sea reales o ideales, las fuentes controladas tienen la propiedad de que su valor depende de una tensión o corriente que existe en algún punto de la red y que se denomina magnitud de control. Es decir, una fuente controlada, o dependiente, no puede, por sí sola, energizar un circuito: para que entregue ya sea una f.e.m o una corriente debe haber al menos una fuente independiente que establezca un estado de régimen en el circuito. Muchos dispositivos electrónicos (por ejemplo, los transistores), tienen más de un par de terminales (es decir, no son dipolos), y la tensión (o la corriente) en un par depende de la tensión (o corriente) en otro par diferente de terminales. Para modelizar estos dispositivos los dipolos resultan ser insuficiente, y se debe recurrir a las fuentes controladas.

Hay cuatro tipos de fuentes controladas, la cuales se muestran en la Figura 17, y podemos observar en los modelos que cada una de ellas tiene dos pares de terminales: entre un par de terminales observamos la magnitud que “entrega” la fuente controlada (una tensión o una corriente) y entre el otro par se indica la magnitud de control.

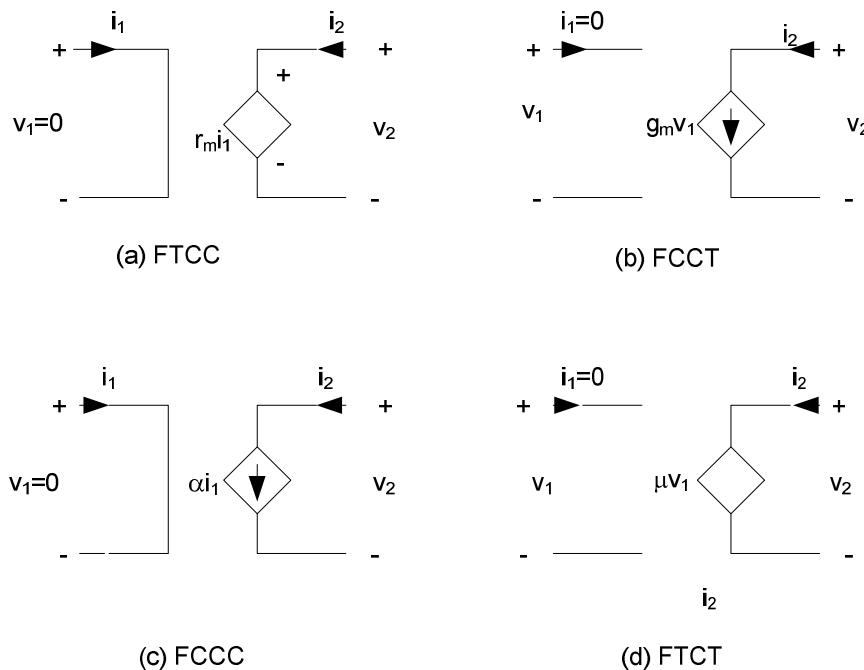


Figura 17: Tipos de Fuentes Controladas

- a) La fente de tensión controlada por corriente (FTCC), Figura 17 (a), está caracterizada por las ecuaciones:

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = r_m I_1 \quad (r_m \text{ se denomina } \underline{\text{transresistencia}}, \text{ su unidad es el } \Omega.)$$

Este tipo de fuente controlada puede utilizarse para modelizar el acoplamiento magnético entre dos inductancias presentes en un circuito, tal como veremos más adelante en este mismo capítulo.

- b) La fente de corriente controlada por tensión (FCCT), Figura 17 (b), está caracterizada por las siguientes ecuaciones:

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = g_m V_1 \quad (g_m \text{ se denomina } \underline{\text{transconductancia}}, \text{ su unidad es el } \text{mho}).$$

Este tipo de fuente constituye el modelo básico para el transistor de efecto de campo (FET).

c) La fente de corriente controlada por corriente (FCCC), Figura 17 (c), está caracterizada por:

$$V_1 = 0$$

$$I_2 = \alpha I_1 \quad (\alpha \text{ se denomina } \underline{\text{factor de amplificación de corriente}}, \text{ es adimensional.})$$

El transistor bipolar puede modelizarse como una fuente de corriente controlada por corriente.

d) La fente de tensión controlada por tensión (FTCT), Figura 17 (d), está caracterizada por las siguientes ecuaciones:

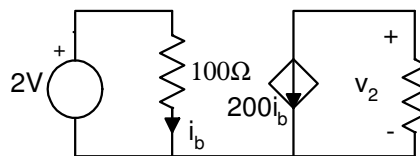
$$I_1 = 0$$

$$V_2 = \mu V_1 \quad (\mu \text{ constante adimensional, se denomina } \underline{\text{factor de amplificación de tensión}}.)$$

La tensión V_1 se denomina magnitud de control, dado que "controla" a la tensión V_2 , y la ecuación escrita en segundo término se denomina "ecuación de control". Los amplificadores operacionales admiten ser modelizados con fuentes de tensión controladas por tensión.

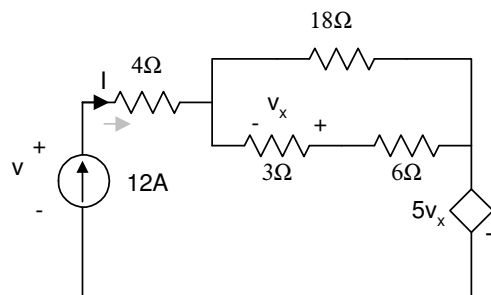
Ejercicios de aplicación

1. Determinar el valor de la tensión v_2



Rta: $V_2 = -20V$

2. En el circuito siguiente, determinar la tensión V , la corriente I , y la potencia absorbida por la fuente independiente.



Rta: $V = 240V$, $I = 12 A$, $P = -2880W$

2.9 Dipolos no lineales o anómalos.

Si bien usualmente, al usar el término resistor (o resistencia) pensamos en un elemento de circuito que responde a la ley de Ohm, nos encontramos con que existen otros "resistores" que pueden ser no lineales, ya sea variables en el tiempo o invariables en el tiempo, si bien todos ellos están caracterizados por la relación entre la tensión de rama y la corriente de rama. Hablaremos así de la característica V-A del resistor, y discutiremos las características de resistores no lineales. En el caso de interconectarlos, formaremos un circuito resistivo, que no necesariamente va a ser lineal. Las

formas más simples de interconexión, es decir serie, paralelo o serie-paralelo, requieren el uso de las leyes de Kirchhoff conjuntamente con las ecuaciones de rama que caracterizan a los elementos. El dipolo equivalente formado por la interconexión de estos resistores estará caracterizado por su característica de punto motriz (de entrada), la cual vincula la tensión en bornes y la corriente.

Un problema importante en los circuitos no lineales es la determinación de los puntos de trabajo en circuitos alimentados con fuentes de corriente continua, así como el análisis en pequeña señal. La determinación de los puntos de trabajo podremos hacerla en forma analítica o en forma gráfica.

Hemos visto que un elemento de dos terminales se denominará resistor si su tensión v y su corriente i satisfacen la relación denominada característica V-A:

$$\mathfrak{R}_R = \{(v, i) / f(v, i) = 0\}$$

El resistor lineal es un caso especial de resistor en el cual esa característica se expresa mediante la ley de Ohm. La relación entre tensión y corriente es lineal, y su representación es una recta que pasa por el origen para todo tiempo. La pendiente de dicha característica (R en el plano i - v ó G en un plano v - i), especifica completamente al resistor de dos terminales lineal.

Un resistor que no es lineal se denomina no lineal, alineal o anómalo. Introduciremos ahora algunos ejemplos de dipolos no lineales, para ir luego al análisis de circuitos con resistores lineales y dipolos no lineales.

Diodo ideal: es un elemento de circuito muy útil. Por definición un diodo ideal es un resistor no lineal cuya característica v - i consiste en dos segmentos de recta en el plano v - i (o i - v). Su símbolo y su característica se muestran en la fig. 18:

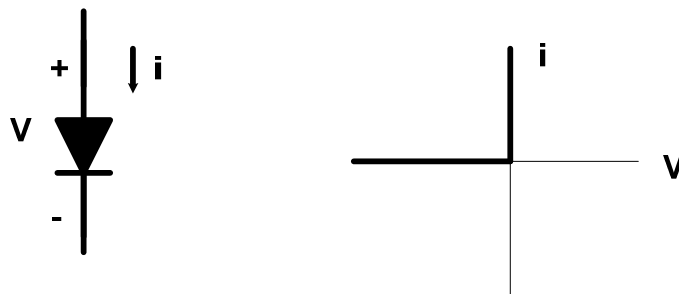


Figura 18: Símbolo y característica V-A de un diodo ideal

Si el diodo está polarizado inversamente ($V < 0$), la corriente es cero, o sea, se comporta como un circuito abierto, y si está conduciendo ($I > 0$), la tensión es cero, o sea, actúa como un cortocircuito. Vemos claramente que la potencia entregada a un diodo ideal es idénticamente nula para todo t , por lo que lo denominamos elemento **no energético**.

Diodo de juntura: Su símbolo y su característica V-A se representan en la Figura 19 (a). Para la mayoría de las aplicaciones estará operando a la derecha del punto A, y en ese rango de operación normal, la corriente obedece a la siguiente ley:

$$i = I_s [e^{v/V_T} - 1]$$

donde I_s es una constante del orden de los microamperes, y representa la corriente inversa de saturación, o sea la corriente en el diodo cuando está polarizado inversamente con una tensión elevada. $V_T = kT/q$ se denomina **voltaje térmico**, donde q es la carga del electrón, k es la constante

de Boltzmann, y T es la temperatura en grados Kelvin. A temperatura ambiente, V_T es aproximadamente igual a 0,026 V.

Esta ecuación nos dice que, para cualquier tensión dada v , la corriente i esta unívocamente determinada. Por esto, un resistor no lineal con esta propiedad se denomina **resistor no lineal controlado por tensión**.

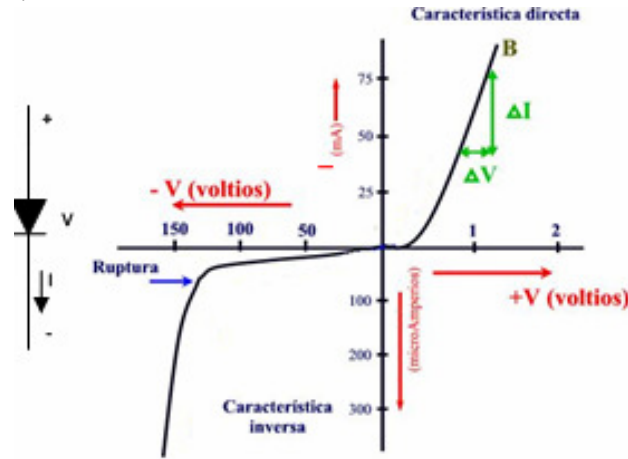


Figura 19: Característica V-A de un diodo de juntura

Por simplicidad cuando un diodo real se encuentre en conducción directa asumiremos que la diferencia de potencial entre sus bornes es constante ($\forall I > 0$) y su valor dependerá del tipo de diodo: $V_D = 0,7$ V para diodos de silicio (Si) y $V_D = 0,3$ V para diodos de germanio (Ge).

Propiedad de bilateralidad: A diferencia del resistor lineal, un resistor no lineal tiene, en general, una característica V-A no simétrica respecto al origen del plano v-i.

La característica de un resistor lineal es siempre simétrica con respecto al origen, y el elemento de circuito con este tipo de simetría se denomina bilateral. Un resistor bilateral satisface la propiedad de que $f(v,i) = f(-v, -i)$ para todo (v,i) de su característica, tal como pasa en la resistencia óhmica pura. Sin embargo, podemos encontrar dipolos anómalos con características V-A bilaterales.

2.10 Resistencia estática – Resistencia dinámica

Para poder caracterizar los dipolos anómalos, introduciremos el concepto de resistencia estática y resistencia dinámica.

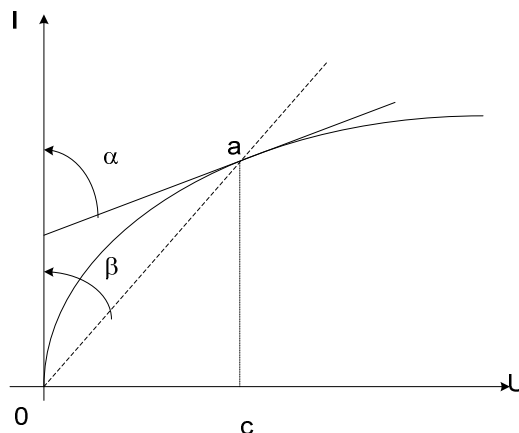


Figura 20: Resistencia estática y dinámica del elemento no lineal

Supongamos tener la característica V-A representada con la curva oab en escala m_i para la corriente y m_u para la tensión, siendo \underline{a} el punto de trabajo del elemento.

La relación entre la tensión oc y la corriente ca determina en un escala $m_r = m_v / m_i$ una magnitud llamada **resistencia estática r** del dipolo en el punto de trabajo. Vemos que la magnitud de esta resistencia es proporcional a la tangente del ángulo β comprendido entre la recta que une al punto a con el origen y el eje de corrientes, o sea,

$$r = \frac{U}{I} = \frac{m_u \overline{oc}}{m_i \overline{ca}} = m_r \operatorname{tag} \beta$$

La relación entre el incremento de la tensión y el incremento de la corriente, o, en el límite, la derivada de la tensión respecto a la corriente en la misma escala m_r nos da la **resistencia dinámica r_d** , la cual es proporcional a la tangente del ángulo α formado por la tangente geométrica a la curva en el punto a y el eje de corrientes, o sea:

$$r_d = \frac{dU}{dI} = m_r \operatorname{tg} \alpha$$

Para un tramo recto de la curva característica, la r_d puede expresarse como la relación entre el incremento finito de tensión y el de la corriente;

$$r_d = \Delta U / \Delta I$$

Para los elementos con característica descendente, la r_d es <0 , dado que un incremento positivo de intensidad es acompañado por un incremento negativo de la tensión.

Si la curva característica se aproxima en alguno de sus tramos a la línea recta, podemos usar para el cálculo un esquema equivalente en el cual el elemento no lineal está representado en forma de una fuente de tensión y una resistencia lineal r_d . Así, las curvas de la Figura 21 pueden reemplazarse en los tramos ab y cd por líneas rectas, cuyas ecuaciones serán:

$$U_1 = U_{01} + r_{d1} I$$

$$U_2 = -U_{02} + r_{d2} I$$

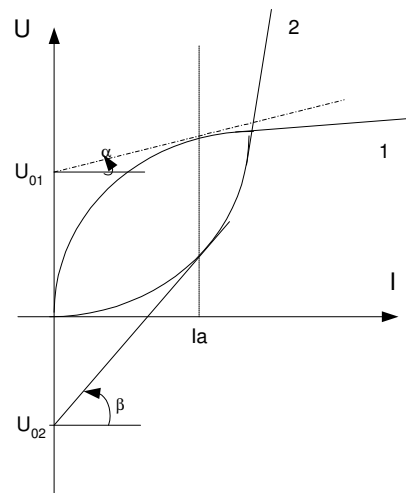


Figura 21: Linealización de la característica V-A para un elemento no lineal

El circuito correspondiente a la ecuación de U_1 será entonces el que se indica en la Figura 22.

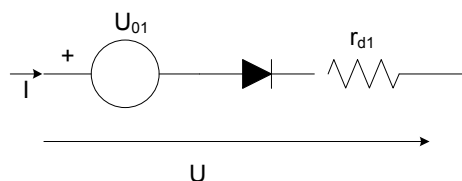


Figura 22: Representación de un elemento no lineal a partir de una linealización

donde se ha incluido al diodo ideal para indicar el único sentido de circulación posible de corriente que circula cuando la tensión en bornes U supera al valor U_{01} . De esta forma obtenemos la característica seccionalmente lineal que se muestra en la figura 21 en línea de trazos.

2.11 Interconexión de dipolos anómalos

Consideraremos ahora circuitos formados por conexiones serie y paralelo de dipolos anómalos, y mostraremos que las mismas conducen a un dipolo cuya característica V-A es igualmente anómala.

a) Conexión serie.

De física sabemos que la conexión serie de resistores lineales es otro resistor lineal cuya resistencia es igual a la suma de las resistencias de cada uno de ellos. Extenderemos este concepto para el caso de tener resistores anómalos.

Consideremos el circuito de la Figura 23 (a), donde dos anómalos \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 están conectados en serie (son recorridos por la misma corriente). Queremos obtener la característica V-A del dipolo equivalente. Supongamos que ambos resistores poseen características tales como:

$$v_1 = \hat{v}_1(i_1) \quad v_2 = \hat{v}_2(i_2)$$

Considerando la topología del circuito y las leyes de Kirchoff podemos ver que:

$$i = i_1 = i_2 \quad v = v_1 + v_2$$

Las expresiones anteriores nos conducen a:

$$v = \hat{v}_1(i) + \hat{v}_2(i) \quad \forall i$$

la cual es la característica V-A del dipolo anómalo equivalente. La resolución gráfica la vemos en la Figura 23 (b), donde hemos sumando tensiones a corriente constante.

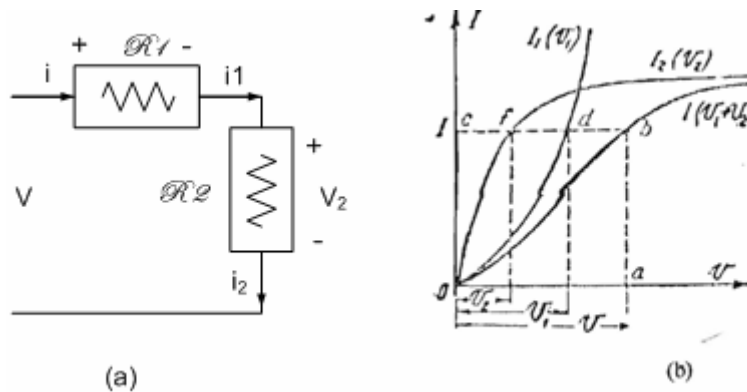


Figura 23: Conexión serie de dipolos anómalos

b) Conexión paralelo:

Consideremos el circuito de la Figura 24 (a), donde dos anómalos \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 se conectan en paralelo. Queremos hallar la característica del dipolo equivalente. Suponemos que son ambos controlados por tensión, y sus características V-A tienen la forma:

$$i_1 = \hat{i}_1(v_2) \quad i_2 = \hat{i}_2(v_2)$$

Las leyes de Kirchhoff y la estructura del circuito nos permiten decir que:

$$v = v_1 = v_2 \quad i = i_1 + i_2$$

Resultando que:

$$i = \hat{i}_1(v) + \hat{i}_2(v) \quad \forall v$$

Gráficamente, la resolución se muestra en la Figura 24 (b), donde, debido a que están conectados en paralelo, se han sumado corrientes a tensión constante.

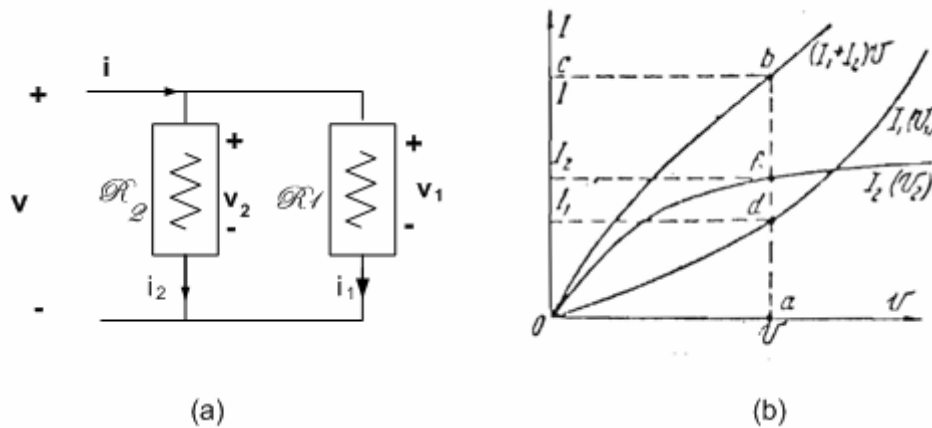


Figura 24: Conexión paralelo de dipolos anómalos

c) Conexión mixta serie-paralelo.

En este caso tenemos los anómalos \mathcal{R}_2 y \mathcal{R}_3 en paralelo conectados en serie con el anómalo \mathcal{R}_1 , tal como se muestra en la Figura 25.

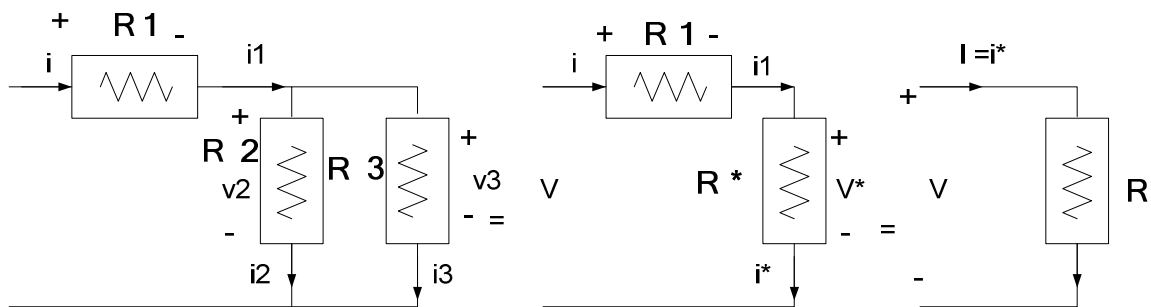


Figura 25: Conexión mixta de dipolos anómalos

Queremos hallar el anómalo equivalente \mathcal{R} para lo cual procederemos a un método de reducción sucesiva. Supongamos que:

$$i_2 = \hat{i}_2(v) \quad i_3 = \hat{i}_3(v)$$

El resistor equivalente es \mathcal{R}^* , controlado por tensión y especificado por:

$$i^* = g(v^*)$$

donde i^* y v^* son la tensión y la corriente de rama del resistor \mathcal{R}^* . Además, $v^* = v_2 = v_3$ e $i^* = i_2 + i_3$.

Luego, podemos escribir que:

$$g(v^*) = \hat{i}_2(v^*) + \hat{i}_3(v^*)$$

Gráficamente, lo obtendremos sumando corrientes a tensión constante.

A continuación debemos obtener la conexión serie \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}^* . La relación V-A del dipolo 1 es:

$$v_1 = \hat{v}_1(i_1)$$

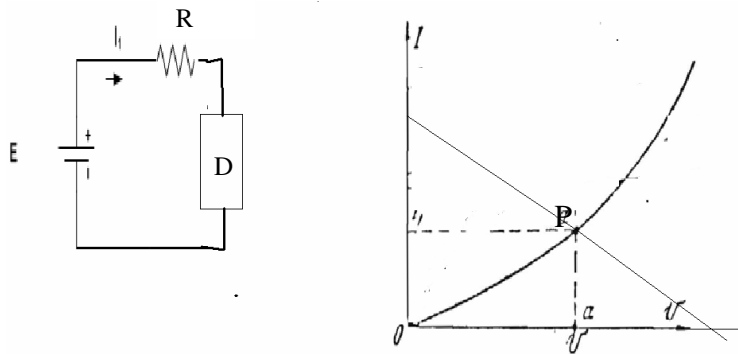
La combinación serie de \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}^* implica que $i = i_1 = i^*$ y $v = v_1 + v_2 = v_1 + v^*$. Resolviendo esto, obtendremos que:

$$v = \hat{v}(i)$$

la resolución gráfica de esta segunda parte implicará sumar tensiones a corriente constante.

2.13 Determinación del punto de trabajo de un anómalo.

La determinación del punto de trabajo de un anómalo la podremos hacer en forma gráfica o en forma analítica.



En ambos casos aplicaremos las leyes de Kirchhoff: el dipolo fuente, compuesto por la fuente de f.e.m. E y la resistencia R es recorrido por la misma corriente que el anómalo D, y por LKT podemos escribir que:

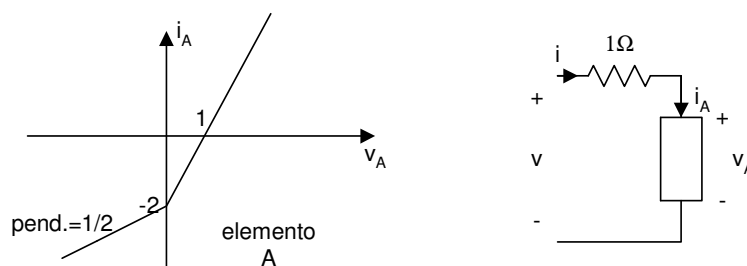
$$E = R I + U_D$$

Conociendo la expresión de U_D en función de I, resolveremos esta ecuación y obtendremos la solución buscada, teniendo en cuenta que hay un único sentido posible de circulación de la corriente, determinado por la fuente de tensión E.

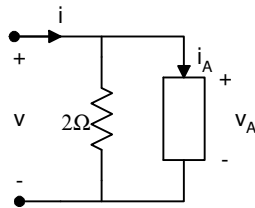
Gráficamente, el punto de trabajo (P) estará en la intersección de la característica V-A de la fuente con la del anómalo.

Ejercicios de aplicación;

1) Usando la característica V-A del elemento A mostrado, determinar por métodos gráficos la característica V-A en bornes de la siguiente red.

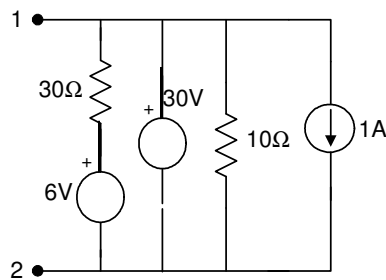


2) Usando la característica V-A del elemento A del ejercicio anterior, determinar por métodos gráficos la característica V-A en bornes de la siguiente red.

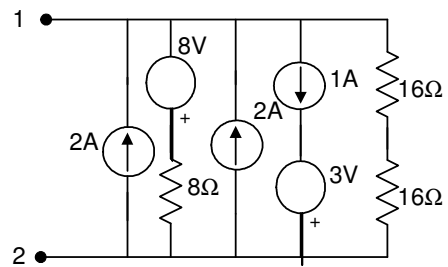


PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Hallar el dipolo equivalente entre los puntos 1-2

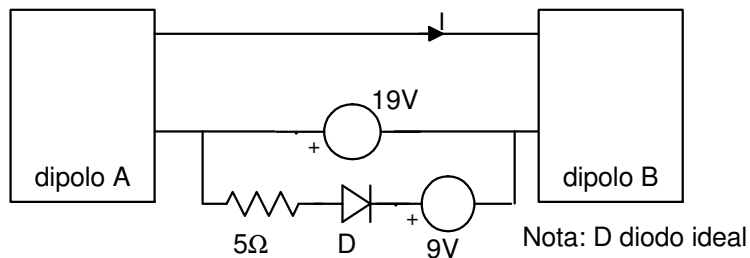


dipolo A



dipolo B

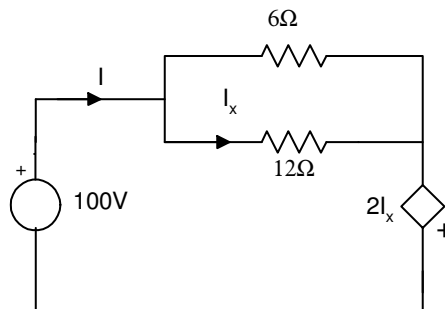
2) Interconectar los dipolos del ejercicio anterior según se indica en el siguiente gráfico y obtener la corriente I y la que circula por el diodo:



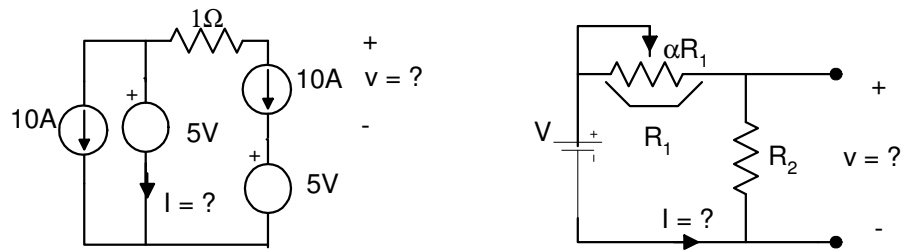
Nota: D diodo ideal

Rta: $I = 5,66 \text{ A}$ $I_D = 2 \text{ A}$

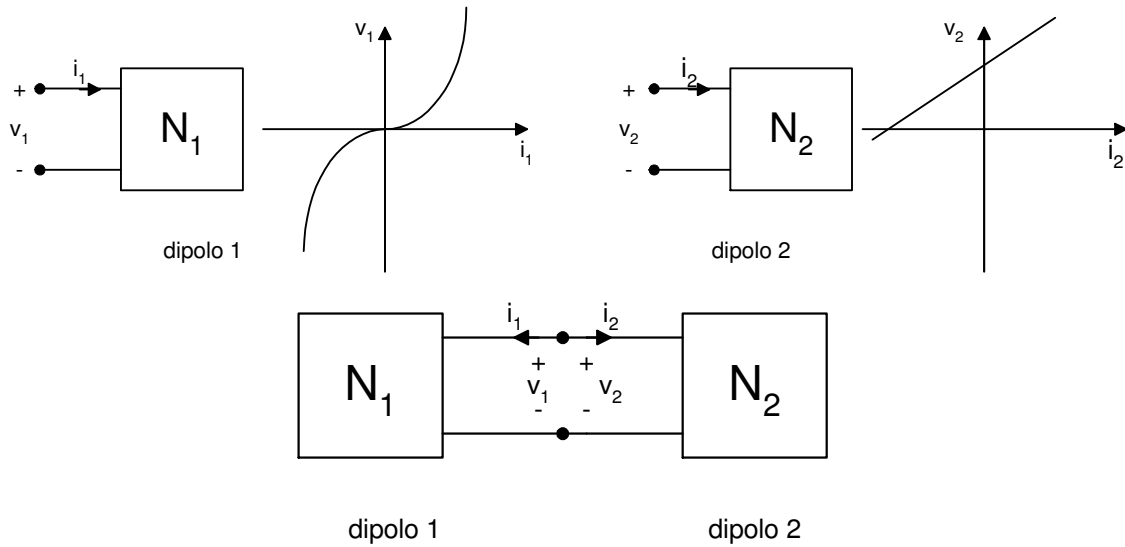
3) Calcular la corriente I y hallar la potencia absorbida por la fuente independiente y por la fuente controlada.



4) Hallar, según corresponda, la tensión y la corriente incógnita indicada.



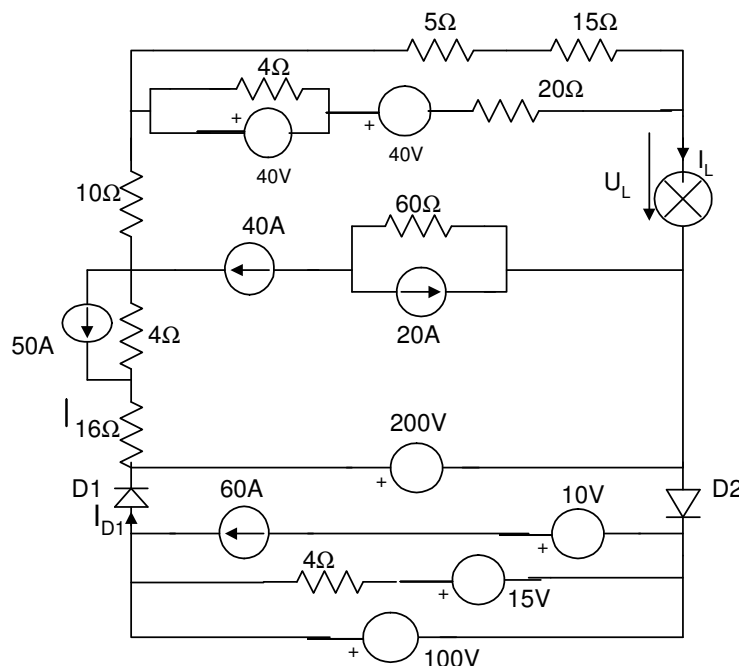
6) Considerar las redes N_1 y N_2 , cuyas características V-A se muestran en la figura. Hallar las tensiones y corrientes indicadas si se conectan como se muestra.



7) Si en el siguiente circuito L es un dipolo simétrico cuya característica V-A es:

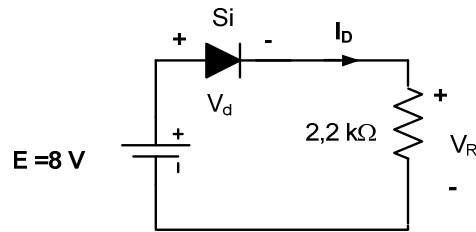
$$U_L = 2I_L^2 + 10 I_L \quad \text{para } I_L > 0$$

Determinar, simplificando el circuito todo lo posible I_{D1} e I_L .

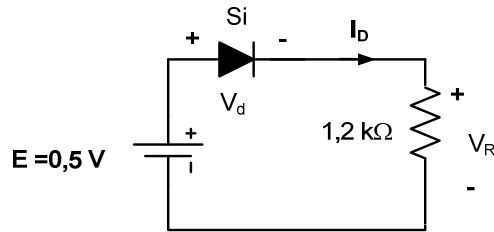


Nota: los diodos son ideales

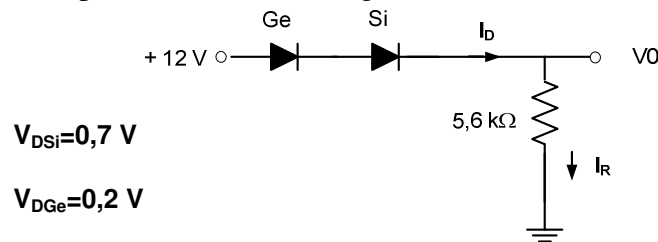
- 8) a) Determinar V_D , I_R e I_D para el circuito de la figura,
 b) Repetir con el diodo invertido.



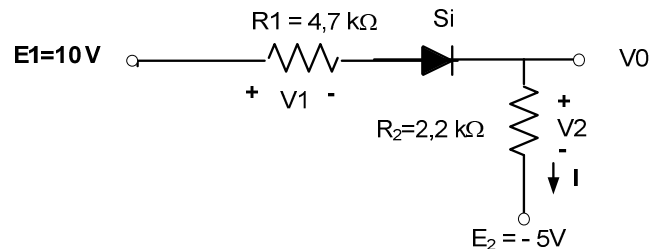
- 9) Determinar V_D , I_R e I_D para el circuito de la figura



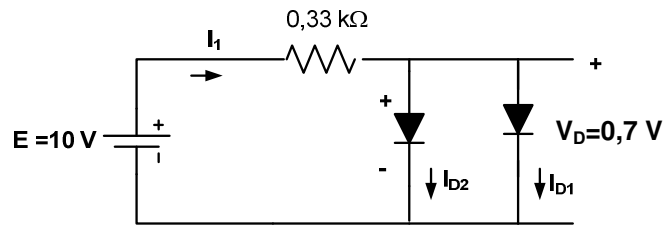
- 10) Determinar V_0 e I_D para el circuito de la figura.



- 11) Determinar I , V_1 , V_2 y V_0 .



- 12) Determinar V_0 , I_1 , I_{D1} , I_{D2} , siendo ambos diodos idénticos.



- 13) Determinar I_1 , I_2 e I_{D2}

